TREŚĆ:Wyznacz wymiary prostokąta o obwodzie 36 cm, którego pole jest największe.

ROZWIĄZANIE:

Wprowadźmy oznaczenia:

a, b - boki prostokąta, $a > 0, \quad b > 0$;

Z treści zadania wiemy, że

$$2(a+b) = 36 \quad \Rightarrow a+b = 18.$$

Ustalmy więc warunki:

$$\begin{cases} a+b = 18 \\ P = ab \ - \ \text{największe} \end{cases}$$

Wyznaczmy z pierwszego równania np. wartość a i wstawmy ją do wzoru na pole prostokąta:

$$\begin{cases} a = 18 - b \\ P = (18-b)b \ - \ \text{największe} \end{cases}$$

W tym momencie musimy zapisać, że $0 < a < 18 \quad \wedge \quad 0 < b < 18$, ponieważ, dla innych wartości otrzymalibyśmy ujemne długości boków.

Zauważmy, że pole jest teraz funkcją zmiennej b. Zapiszemy więc:

$$P(b) = -b^2 + 18b.$$

Teraz szukamy największej wartości tej funkcji. Jest to funkcja kwadratowa, jej wykres ma ramiona zwrócone ku dołowi, co oznacza, że największą wartość osiągnie w wierzchołku. Wypiszmy współczynniki trójmianu:

$$a = -1, \quad b = 18, \quad c = 0.$$

Wierzchołek paraboli znajduje się, zgodnie ze wzorem $x_W = \frac{-b}{2a}$, w punkcie:

$$b_W = \frac{-18}{-2} = 9.$$

Oznacza to, że największe pole otrzymamy dla:

$$\begin{cases} b = 9 \\ a = 18 - b = 18 - 9 = 9. \end{cases}$$

ODP: Pole prostokąta będzie największe dla $\begin{cases} a = 9 \\ b = 9. \end{cases}$