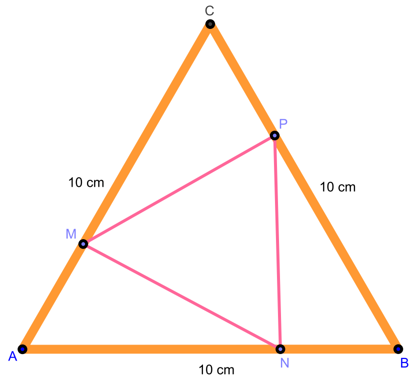
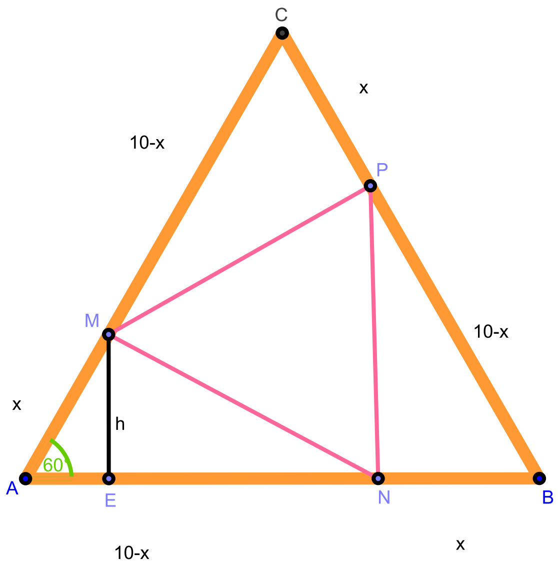
TREŚĆ:Trójkąt równoboczny ABC ma bok długości 10cm. Na jego bokach obrano punkty M, N, P tak, że $|AM| = |BN| = |CP|$ (jak na rysunku). Jak należy wybrać punkty M, N i P, aby pole trójkąta MNP było najmniejsze?



ROZWIĄZANIE:

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku: Oczywiście $0 < x < 10$ - długość boku nie może być liczbą ujemną.



Trójkąt ABC jest równoboczny, więc trójkąty ANM, BPN i CMP są przystające z własności bok-kąt-bok (bkb). Przystające to w praktyce takie same, identyczne.

Oznacza to, że równe są odcinki $|MN| = |MP| = |PN|$ a co za tym idzie, że trójkąt MNP jest równoboczny.

Teraz wypada wyznaczyć jego pole.

Posłużymy się pomocniczym trójkątem ANM (przystającym z trójkątami PNB i CMP):

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Pole trójkąta AMN jest więc równe:

$$P_{AMN} = \frac{1}{2}(10 - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Z przystawania mamy $P_{AMN} = P_{PNB} = P_{PMC}$ i wtedy:

$$P_{MNP} = P_{ABC} - 3P_{AMN}.$$

Na podstawie wiadomości z treści zadania (bok trójkąta ABC równy 10 cm) i wzoru: pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest równe $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$:

$$P_{ABC} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3},$$

$$P_{MNP} = 25\sqrt{3} - 3(\frac{1}{2}(10 - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Wykonujemy teraz obliczenia upraszczające wyrażenie:

$$P_{MNP} = 25\sqrt{3} - 3\frac{\sqrt{3}}{4}x(10 - x),$$

$$P_{MNP} = 25\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2,$$

$$P_{MNP} = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{15\sqrt{3}}{2}x + 25\sqrt{3}.$$

I to właśnie pole ma być najmniejsze.
Jest to funkcja zmiennej x, największą wartość osiągnie w wierzchołku $x_W = \frac{-b}{2a}$, więc:

$$x_W = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = 5.$$

Najmniejsze pole osiągniemy dla wartości x=5 - zauważmy, że wtedy punkty M, N i P leżą dokładnie w połowie boków AC, AB, BC.