TREŚĆ: Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zmienimy cyfry skrajne to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Znajdź tę liczbę.
ROZWIĄZANIE:
Na początku zapiszmy liczbę w ten sposób, jak ją widzimy:

$$\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}.$$

Pamiętajmy zatem, że $a,\ b$ i c muszą być cyframi, dodatkowo a, a także c nie mogą być zerami (nie mielibyśmy liczb trzycyfrowych):

$$\begin{cases} a \in \{1, 2, ..., 8, 9\} \\ b \in \{0, 1, 2, ..., 8, 9\} \\ c \in \{1, 2, ..., 8, 9\} \end{cases}$$

Zapis $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$ oznacza jednak, że nasza liczba jest równa:

$$100a + 10b + c.$$

Po przestawieniu skrajnych cyfr mamy:

$$\underline{c}\ \underline{b}\ \underline{a},$$

czyli:

$$100c + 10b + a.$$

Wykorzystajmy wiadomości z treści zadania w celu zapisania układu równań, który po rozwiązaniu da nam szukane cyfry $a,\ b$ i c.

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 30 \\ 100a + 10b + c + 396 = 100c + 10b + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 30 \\ 99a - 99c + 396 = 0 | : 99 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 30 \\ a - c + 4 = 0 \end{cases}$$

Z trzeciego równania wyznaczmy a i wstawmy do pozostałych równań:

$$\begin{cases} a = c - 4 \\ c - 4 + b + c = 8 \\ (c - 4)^2 + b^2 + c^2 = 30 \end{cases}$$

i teraz uprośćmy. Otrzymamy:

$$\begin{cases} a = c - 4 \\ 2c + b = 12 \\ c^2 - 8c + 16 + b^2 + c^2 = 30 \ \Leftrightarrow 2c^2 - 8c + b^2 = 14 \end{cases}$$

Teraz z drugiego równania wyznaczmy b i wstawmy do równania trzeciego.

$$\begin{cases} a = c - 4 \\ b = 12 - 2c \\ 2c^2 - 8c + (12 - 2c)^2 = 14 \end{cases}$$

Wystarczy tylko rozwiązać równanie ze zmienną c, a następnie otrzymane wartości wstawić do równań na a i na b.

$$2c^2 - 8c + (12 - 2c)^2 = 14$$

$$2c^2 - 8c + 144 - 48c + 4c^2 = 14$$

$$6c^2 - 56c + 130 = 0 \mid : 2$$

$$3c^2 - 28c + 65 = 0$$

Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą c.
Aby je rozwiązać będą nam potrzebne wzory na deltę i pierwiastki równania kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$\text{jeśli} \quad \Delta > 0 \quad \text{to} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$\text{jeśli} \quad \Delta = 0 \quad \text{to} \quad x_0 = \frac{-b}{2a},$$

$$\text{a jeśli} \quad \Delta < 0 \quad \text{to trójmian nie ma pierwiastków.}$$

Wypiszmy więc współczynniki trójmianu:

$$a = 3, \quad b = -28, \quad c = 65.$$

W takim razie:

$$\Delta = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 65 = 784 - 780 = 4, \qquad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$c_1 = \frac{28 + 2}{6} = \frac{30}{6} = 5, \quad c_2 = \frac{28 - 2}{6} = \frac{26}{6}$$

Wartość c_2 musimy jednak odrzucić, ponieważ nie jest to cyfra.
Ostatecznie:

$$\begin{cases} c = 5 \\ a = c - 4 = 5 - 4 = 1 \\ b = 12 - 2c = 12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2 \end{cases}$$

Wyjściową liczbą było: $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$, czyli 125.

ODP: Szukaną liczbą jest 125.