TREŚĆ: Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x\cdot|x-2|-3}}.$$

ROZWIĄZANIE:

W tym zadaniu, musimy wiedzieć, że mianownik ułamka nie może być zerem oraz, że pod pierwiastkiem kwadratowym nie może być liczby ujemnej. W tym celu narzucamy warunki:

$$1^\circ.\ \ \sqrt{x\cdot|x-2|-3} \neq 0 \quad \wedge \quad 2^\circ.\ \ x\cdot|x-2|-3 \geqslant 0.$$

A to sprowadza się do warunku:

$$x\cdot|x-2|-3 > 0,$$

który rozwiązujemy korzystając z przydatnego twierdzenia:

Jeżeli niewiadoma występuje pod wartością bezwzględną i poza nią, to aby rozwiązać nierówność rozważamy odpowiednie przypadki: gdy wyrażenie spod wartości bezwzględnej jest nieujemne i gdy wyrażenie to jest ujemne.

Ma to ścisły związek z definicją wartości bezwzględnej:

$$x = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dlatego rozważamy dwa przypadki:

$$1^\circ.\ \ x-2<0 \quad \vee \quad 2^\circ.\ \ x-2 \geqslant 0,$$

a więc zachowanie nierówności w dwóch przedziałach

$$1^\circ.\ \ \begin{cases} x \in (-\infty;2) \\ x(-x+2)-3>0 \end{cases} \quad \vee \quad 2^\circ.\ \ \begin{cases} x \in \langle 2;+\infty) \\ x(x-2)-3>0 \end{cases}$$

W obu przypadkach będą nam potrzebne wzory na deltę i pierwiastki równania kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$\text{jeśli} \quad \Delta > 0 \quad \text{to} \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$\text{jeśli} \quad \Delta = 0 \quad \text{to} \quad x_0 = \frac{-b}{2a},$$

$$\text{a jeśli} \quad \Delta < 0 \quad \text{to trójmian nie ma pierwiastków.}$$

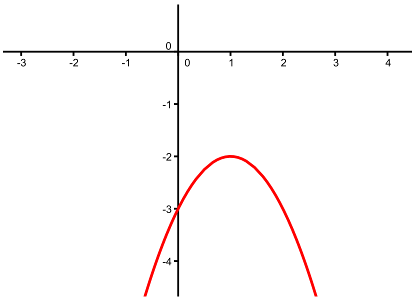
Zajmijmy się przypadkiem pierwszym:

$$1^\circ.\ \ \begin{cases} x \in (-\infty;2) \\ x(-x+2)-3>0 \end{cases}$$

$$-x^2+2x-3>0,$$

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3) = 4-12 = -8 \ < 0$$

Oznacza to, że nie mamy miejsc zerowych, i nasz wykres wygląda tak:



My potrzebujemy dodatnich wartości tej funkcji, niestety wszystkie są ujemne. Daje nam to w wyniku zbiór pusty, bo:

$$1^\circ. \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \\ x \in \emptyset \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Przejdźmy do przypadku drugiego:

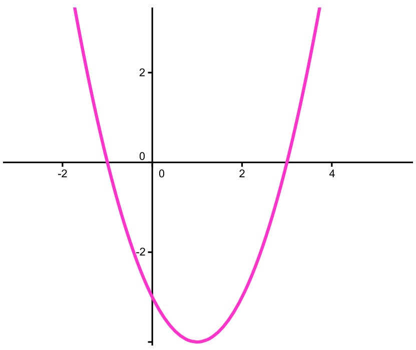
$$2^\circ. \begin{cases} x \in \langle 2; +\infty) \\ x(x-2) - 3 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0,$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Wykres wygląda następująco:



Tym razem również potrzebujemy dodatnich wartości funkcji, otrzymamy je dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, pamiętajmy jednak, o warunku na x:

$$2^\circ. \begin{cases} x \in \langle 2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in (3; +\infty)$$

Ostatecznie:

$$1^\circ \;\vee\; 2^\circ \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$$

ODP: Dziedziną jest zbiór $(3; +\infty)$.