TREŚĆ: Naszkicuj wykres funkcji:

$$y = |x^2 - x| + 1 - x$$

i oblicz dla jakiego parametru m równanie $f(x) = 4m$ ma 2 rozwiązania.

ROZWIĄZANIE:

W celu uproszczenia wzoru funkcji odniesiemy się do definicji wartości bezwzględnej:

$$x = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dlatego rozważamy dwa przypadki: gdy wyrażenie spod wartości bezwzględnej jest ujemne i gdy jest nieujemne.

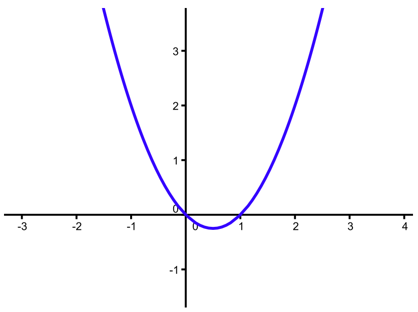
$$1^\circ. \;\; x^2 - x < 0 \quad \vee \quad 2^\circ. \;\; x^2 - x \geqslant 0,$$

W celu wyznaczenia przedziałów rozwiążemy najpierw równanie $x^2 - x = 0$, a następnie odczytamy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości większe lub równe zero i odpowiednio - mniejsze od zera.

$$x^2 - x = 0, \quad \Rightarrow \quad x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

Dzięki wyznaczonym miejscom zerowym łatwiej narysować parabolę:



Mamy więc:

1°. $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$,

2°. $x^2 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Dla tych przedziałów funkcja zachowa się następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 - x & \text{dla} \quad x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1, +\infty) \\ -x^2 + x + 1 - x & \text{dla} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

Po uproszczeniu:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

W tym momencie zadanie sprowadza się do narysowania obu parabol i zaznaczenia ich w odpowiednich przedziałach. Zacznijmy od miejsc zerowych:

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

narysujemy więc funkcję kwadratową o wierzchołku w punkcie $W = (1, 0)$ z podwójnym miejscem zerowym

$-x^2 + 1 = 0$

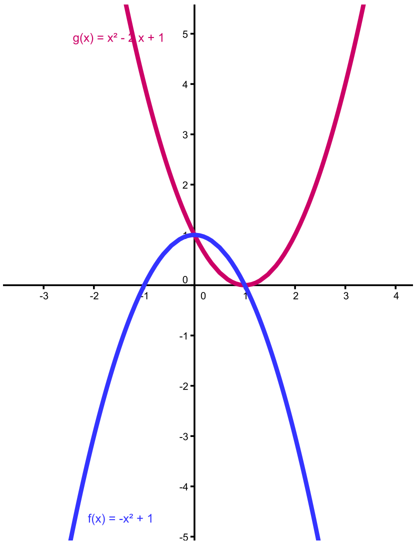
$x^2 = 1$

$|x| = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

tu w zasadzie wystarczy przesunąć wykres funkcji $y = -x^2$ o jedną jednostkę w górę

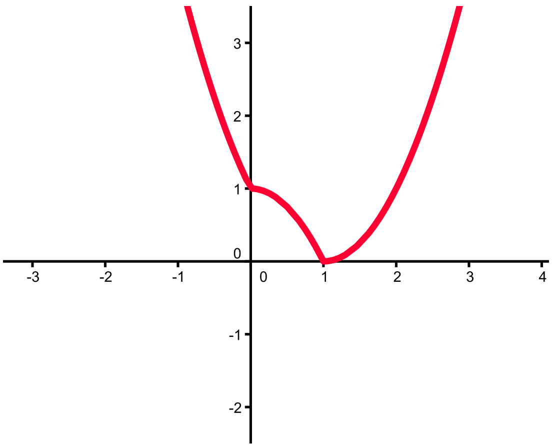
Odpowiednie parabole wyglądałyby tak:



U nas musimy wziąć pod uwagę przedziały w jakich te funkcje istnieją:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

A na rysunku:



Bez większego problemu widać, że równanie $|x^2 - x| + 1 - x = 4m$, gdzie użyjemy funkcji pomocniczej $g(x) = 4m$, będzie mieć dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4m > 0 \Rightarrow m > 0,$$

czyli dla $m \in (0; +\infty)$.