TREŚĆ: Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania

$$x^2 - (m-5)x + m^2 - 6m + 5 = 0$$

jest większa od 7?

ROZWIĄZANIE:

Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą x i parametrem k.

Narzucimy więc warunki:

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 7 \end{cases}$$

Zauważmy, że w treści nie jest powiedziane, że mają być to dwa różne pierwiastki - dopuszczamy więc $\Delta \geqslant 0$.

Skorzystamy z wzoru na Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

i z wzorów Viete'a na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Wypiszmy współczynniki trójmianu:

$$a = 1, \quad b = -(m-5), \quad c = m^2 - 6m + 5$$

1°.

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow \Big(-(m-5)\Big)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 6m + 5) \geqslant 0,$$

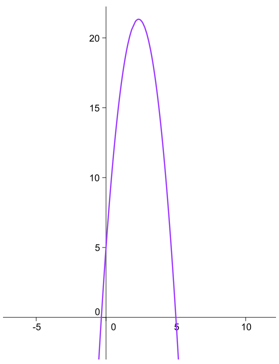
$$m^2 - 10m + 25 - 4m^2 + 24m - 20 \geqslant 0,$$

$$-3m^2 + 14m + 5 \geqslant 0,$$

$$\Delta_m = 14^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 196 + 60 = 256, \qquad \sqrt{\Delta_m} = 16,$$

$$m_1 = \frac{-14-16}{-6} = 5, \quad m_2 = \frac{-14+16}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Pomocnicza parabola z ramionami w dół:



$$m \in \langle -\frac{1}{3}; 5 \rangle$$

Dla takiego m wyjściowe równanie ma jeden lub dwa pierwiastki rzeczywiste. Teraz sprawdzimy, kiedy suma kwadratów tych pierwiastków jest liczbą większą od 7.

2°.

$$x_1^2+x_2^2>7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2>7,$$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2},$$

$$\frac{b^2-2ac}{a^2}>7$$

$$\frac{\Big(-(m-5)\Big)^2-2\cdot 1\cdot(m^2-6m+5)}{1^2}>7$$

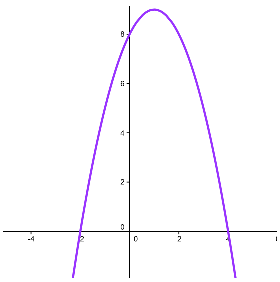
$$m^2-10m+25-2m^2+12m-10>7,$$

$$-m^2+2m+8>0,$$

$$\Delta_m=2^2-4\cdot(-1)\cdot 8=4+32=36,\quad \sqrt{\Delta_m}=6,$$

$$m_1=\frac{-2-6}{-2}=4,\quad m_2=\frac{-2+6}{-2}=-2$$

W celu rozwiązania nierówności szkicujemy parabolę:



$$m\in(-2;4)$$

Łączymy teraz oba warunki:

$$1^\circ\wedge 2^\circ\Leftrightarrow m\in\langle-\frac{1}{3};5\rangle\wedge m\in(-2;4),$$

czyli:

$$m\in\langle-\frac{1}{3};4).$$

ODP: Suma kwadratów pierwiastków równania jest większa od 7 dla parametru $m\in\langle-\frac{1}{3};4)$.