TREŚĆ: Suma długości podstawy trójkąta i wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi m. Wyznacz długość podstawy i wysokości tak, aby pole trójkąta było największe.

ROZWIĄZANIE:

Wprowadźmy oznaczenia:

a - podstawa trójkąta, $a > 0$;

h - wysokość trójkąta, $h > 0$.

Z treści zadania wiemy, że

$$a + h = m.$$

m jest stałą liczbą i może przyjmować dowolną wartość, szukamy długości podstawy i wysokości zależnej właśnie od m.

Ustalmy więc warunki:

$$\begin{cases} a + h = m \\ P = \frac{1}{2}ah \ - \ \text{największe} \end{cases}$$

Wyznaczmy z pierwszego równania np. wartość a i wstawmy ją do wzoru na pole trójkąta:

$$\begin{cases} a = m - h \\ P = \frac{1}{2}(m-h)h \ - \ \text{największe} \end{cases}$$

W tym momencie musimy zapisać, że $0 < a < m \wedge 0 < h < m$, ponieważ, dla $h \geqslant m$ otrzymalibyśmy $a \leqslant 0$, a przecież długość boku nie może być liczbą ujemną.

Zauważmy, że pole jest teraz funkcją zmiennej h. Zapiszemy więc:

$$P(h) = -\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}mh$$

Teraz szukamy największej wartości tej funkcji. Jest to funkcja kwadratowa, jej wykres ma ramiona zwrócone ku dołowi, co oznacza, że największą wartość osiągnie w wierzchołku. Wypiszmy współczynniki trójmianu:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}m, \quad c = 0.$$

Wierzchołek paraboli znajduje się, zgodnie ze wzorem $x_W = \frac{-b}{2a}$, w punkcie:

$$h_W = \frac{-\frac{1}{2}m}{-1} = \frac{1}{2}m.$$

Piszemy h_W, ponieważ nasza funkcja dotyczy zmiennej h, a nie jak we wzorach ogólnych x.

Oznacza to, że największe pole otrzymamy dla:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}m \\ a = m - h = m - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m \end{cases}$$

ODP: Pole trójkąta będzie największe dla

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}m \\ a = \frac{1}{2}m \end{cases}$$